TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 345, Number 1, September 1994

THÉORÈME DE NEY-SPITZER SUR LE DUAL DE SU(2)

PHILIPPE BIANE

ABSTRACT. Let ϕ be a central, noneven, positive type function on SU(2) with $\phi(e) < 1$. For any polynomial function p on SU(2), let $V(p)$ be the left convolution operator by $p/(1-\phi)$ on $L^2(\mathrm{SU}(2))$, we prove that $V(p)/V(1)$ is a pseudodifferential operator of order 0 and give an explicit formula for its principal symbol. This is interpreted in terms of Martin compactification of a quantum random walk.

INTRODUCTION

Un théorème célèbre dû à P. Ney et F. Spitzer [N-S] énonce que la compactification de Martin d'une marche aléatoire décentrée dans Z^d s'obtient en rajoutant une sphère S^{d-1} à l'infini.

Je vais montrer dans cet article que ce théorème admet un analogue lorsqu'on considère des marches aléatoires à valeurs dans un espace non-commutatif, qui est le dual de SU(2). Un tel espace est décrit (suivant A. Connes [C]) non par un ensemble de points mais par une algèbre (non-commutative) qui joue le role d'algèbre de fonctions à valeurs complexes sur cet espace. Le dual de SU(2) est l'espace non-commutatif dont l'algèbre des fonctions est l'algèbre du groupe SU(2), qui est aussi une bigèbre. Il y a une notion naturelle de marche aléatoire sur un tel espace, (voir [B1, P]), ainsi que des fonctions harmoniques positives pour ces marches aléatoires, ce qui permet de poser le problème de la compactification de Martin. La solution de ce problème amène à considérer l'extension de C^*-algèbres

$$0 \to \mathscr{K}_i \to \Psi_i^0 \to C(S^2) \to 0$$

où $\mathscr{K}_i$ est l'algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(\mathrm{SU}(2))$ invariants à droite, Ψ_i^0 est la C^*-algèbre engendrée par les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 invariants à droite sur $L^2(\mathrm{SU}(2))$, et $\sigma\colon \Psi_i^0 \to C(S^2)$ est l'application symbole principal à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur la sphère S^2. Si l'on considère $\mathscr{K}_i$ comme l'algèbre des fonctions nulles à l'infini sur le dual de SU(2), cette extension s'interprète comme une compactification du dual de SU(2) par une sphère S^2 à l'infini. On verra que l'on peut associer à une fonction centrale de type positif sur SU(2) un "noyau de Martin", et que la compactification de Martin associée est donnée par l'extension ci-dessus. Ce résultat est un analogue du théorème de Ney-Spitzer, qui montre la même chose lorsque le groupe SU(2) est remplacé par un tore T^d.

Received by the editors February 1, 1993 and, in revised form, June 28, 1993.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J15; Secondary 22D15.

Voici le plan de l'article: Je commence (§1) par faire des rappels sur la compactification de Martin d'une chaîne de Markov et le théorème de Ney et Spitzer, ensuite (§2) j'introduis différentes algèbres associées à un groupe compact puis (§3) je rappelle des résultats obtenus précédemment sur l'équation de Choquet-Deny dans ce contexte. Au §4 j'introduis le noyau de Martin, ensuite (§5) j'étudie la version non-commutative de la notion de compactification et j'énonce le résultat principal (Théorème 5.1). Ensuite (§§6, 7) je démontre le Théorème 5.1, puis enfin (§8) j'examine ce qu'il advient dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple.

1. Rappels sur le théorème de Ney et Spitzer

1.1. La compactification de Martin d'une chaîne de Markov.

Je commence par rappeler des résultats classiques sur la frontière de Martin des chaînes de Markov (voir [K-S-K, chapitre 10]). Soient E un ensemble dénombrable, $p(x, y)$ un noyau sous-markovien sur E, qui définit l'opérateur P:

$$Pf(x) = \sum_{y\in E} p(x, y)f(y)$$

On suppose que la chaîne de Markov associée est transiente. Les solutions positives de l'équation $Pf = f$ sont appelées fonctions P-harmoniques, et les fonctions P-harmoniques h telles que

$$(f \leq h \text{ et } f P\text{-harmonique}) \Rightarrow (f = \lambda h \text{ pour une constante positive } \lambda)$$

sont appelées minimales. Soit $U = \sum_{n=0}^{\infty} P^n$ le potentiel de la chaîne, qui est donné par le noyau $u(x, y)$. On choisit une mesure initiale positive r sur E telle que $rU(y) = \int_E u(x, y)\,dr(x)$ soit partout > 0, et on introduit le noyau de Martin k défini par

$$k(x, y) = u(x, y)/rU(y).$$

La compactification de Martin de E est le plus petit espace topologique compact $\overline{E}$ contenant E et tel que les fonctions $k(x, \cdot)$ se prolongent par continuité à $\overline{E}$, la frontière $\partial E = \overline{E}\backslash E$ étant appelée la frontière de Martin (cette compactification dépend de r en général). Pour tout $\xi \in \partial E$, la fonction $k(\cdot, \xi)$ sur E est P-harmonique, et pour toute minimale r-intégrable h, il existe un unique $\xi \in E$ tel que h est un multiple de $k(\cdot, \xi)$. Appelant ∂E_m la partie de la frontière de Martin correspondant à des minimales, on a alors le résultat de représentation suivant. Toute fonction P-harmonique, r-intégrable, f admet une représentation

$$f = \int_{\partial E_m} k(\cdot, \xi)\,dm_f(\xi)$$

avec une mesure positive m_f unique.

1.2. Fonctions harmoniques positives sur un groupe abélien.

Soient A un groupe abélien localement compact, et μ une mesure de probabilités sur A, telle que le semi-groupe engendré par son support est A tout entier. Un résultat dû à Choquet et Deny [De] décrit l'ensemble des fonctions positives solutions de l'équation $\mu * f = f$. Une telle solution peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$f = \int_{\mathscr{E}_\mu} e \, dm_f(e)$$

où $\mathscr{E}_\mu$ est l'ensemble des exponentielles μ-harmoniques, c'est à dire des morphismes de groupes $e\colon A \to \mathbb{R}_+^*$ tels que $\int_A e(g)\, d\mu(g) = 1$, et m_f est une mesure positive finie sur $\mathscr{E}_\mu$.

1.3. Le théorème de Ney et Spitzer.

Considèrons le groupe $A = Z^d$. L'opérateur de convolution par la mesure μ est un opérateur Markovien, donné par le noyau $p(x, y) = \mu(\{y - x\})$, avec un potentiel de la forme $u(x, y) = u(y - x)$. On peut donc former le noyau de Martin, $k(x, y) = u(y - x)/u(y)$ avec pour mesure initiale la masse de Dirac à l'origine, et construire la frontière associée. Le résultat de Choquet-Deny rappelé en 1.2 montre que les harmoniques minimales pour l'opérateur P sont les multiples des exponentielles μ-harmoniques. Soit ϕ la fonction sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\phi(\xi) = \sum_{Z^d} e^{\langle \xi , y \rangle} \mu(\{y\}).$$

On suppose que cette fonction est finie dans un voisinage l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^d | \phi(\xi) = 1\}$, et que la mesure μ est décentrée. L'ensemble $\mathscr{E}_\mu$ s'identifie à $\{\xi \in \mathbb{R}^d | \phi(\xi) = 1\}$ par l'application $\xi \to e^{\langle \xi , \cdot \rangle}$.

L'application ϕ est dérivable au voisinage de $\{\xi \in \mathbb{R}^d | \phi(\xi) = 1\}$, par conséquent (voir [N-S, Lemma 1.1]), l'application $l\colon \mathscr{E}_\mu \to S^{d-1}$ donnée par $l(\xi) = d\phi(\xi)/|d\phi(\xi)|$ est un homéomorphisme. Ney et Siptzer ont obtenu un équivalent précis à l'infini du noyau potentiel $u(y - x)$ leur permettant de montrer que la compactification de Martin s'identifie avec la compactification naturelle de Z^d par une sphère S^{d-1} à l'infini. Autrement dit, en posant $k(x, u) = e^{\langle l^{-1}(u), x \rangle}$ pour $u \in S^{d-1}$ on obtient pour tout $x \in Z^d$ une fonction continue $k(x, \cdot)$ sur la compactification de Z^d par la sphère à l'infini S^{d-1}.

2. Quelques algèbres associées à un groupe compact

2.1. Soit G un groupe compact, d'après le théorème de Peter-Weyl, l'espace $L^2(G)$ admet une décomposition en somme directe hilbertienne

$$L^2(G) = \sum_{\rho \in R} E_\rho$$

où R est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G et E_ρ est l'espace des fonctions coefficients d'une telle (classe de) représentation ρ.

Appelons $V(G)$ l'algèbre de von Neumann de G, c'est à dire (voir Dixmier [Di]) l'algèbre des opérateurs bornés sur $L^2(G)$ qui commutent avec les translations à droite

$$\delta_g(f)(h) = f(hg).$$

C'est aussi l'algèbre fortement fermée engendrée par les opérateurs de translation à gauche:

$$\gamma_g(f)(h) = f(g^{-1}h).$$

Cette algèbre admet une décomposition centrale:

$$V(G) = \bigoplus_{\rho \in R} V_\rho(G) \tag{2.1.1}$$

où chaque algèbre $V_\rho(G)$ est l'algèbre de convolution par les fonctions coefficients de la représentation ρ (en particulier, $V_\rho(G)$ est isomorphe à $M_{d_\rho}(\mathbb{C})$, d_ρ étant la dimension de la représentation ρ).

$V(G)$ est munie d'un coproduit Δ qui est un morphisme d'algèbres de von Neumann: $\Delta\colon V(G) \to V(G) \otimes V(G)$ (le produit tensoriel étant pris au sens des algèbres de von Neumann) entièrement déterminé par la formule:

$$\Delta(\gamma_g) = \gamma_g \otimes \gamma_g.$$

On appellera poids de Haar la restriction à $V(G)$ de la trace sur $B(L^2(G))$ (ce nom étant justifié par la formule: $\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr} \circ \Delta(a) = \mathrm{tr}(a).1$, pour a opérateur à trace dans $V(G)$).

2.2. On note $V^0(G)$ la somme algébrique des sous-algèbres $V_\rho(G)$, et $\mathscr{K}_i(G)$ la sous-algèbre formée des opérateurs de $V(G)$ qui sont compacts.

Un opérateur $a = \bigoplus_{\rho \in R} a_\rho$ est dans $V^0(G)$ (resp. $\mathscr{K}_i(G)$) si et seulement si $a_\rho = 0$ sauf pour un nombre fini de ρ (resp. si $\|a_\rho\| \to 0$ quand $\rho \to \infty$ dans R).

Lorsque G est un groupe de Lie, on note $\Psi_i^0(G)$ la C^*-algèbre engendrée par les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 invariants à droite (je renvoie à Taylor [T] pour la définition et les principales propriétés des opérateurs pseudodifférentiels). Un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 possède un symbole principal qui est une fonction sur le fibré en sphère cotangent de G. Lorsque l'opérateur est invariant à droite, cette fonction est déterminée par sa valeur sur $S(T_e^*(G))$, et par conséquent l'application symbole principal $\sigma\colon \Psi_i^0(G) \to C(S(T_e^*(G)))$ détermine une suite exacte de C^*-algèbres: $0 \to \mathscr{K}_i \to \Psi_i^0 \to C(S(T_e^*(G))) \to 0$.

2.3. Lorsque G est un groupe abélien, on peut identifier les algèbres ci-dessus à l'aide du groupe dual $\widehat{G}$ qui est un groupe discret. On a $R = \widehat{G}$, et d'après (2.1.1), l'algèbre $V(G)$ est isomorphe à $L^\infty(\widehat{G})$, $V^0(G)$ à l'ensemble des fonctions à support fini sur $\widehat{G}$, et $\mathscr{K}_i(G)$ à $C_0(\widehat{G})$.

Si G est un tore de dimension d, alors $\widehat{G}$ est isomorphe à Z^d, et Ψ_i^0 est isomorphe à l'algèbre des fonctions sur Z^d qui admettent un prolongement continu à la sphère à l'infini. L'interprètation du coproduit Δ en termes de $L^\infty(\widehat{G})$ est la suivante: $L^\infty(\widehat{G}) \otimes L^\infty(\widehat{G})$ est isomorphe à $L^\infty(\widehat{G} \times \widehat{G})$ (il s'agit d'un produit tensoriel d'algèbres de von Neumann) et avec cette identification, $\Delta f(x, y) = f(x+y)$, donc le coproduit Δ est la traduction fonctionnelle de la loi de groupe sur $\widehat{G}$.

2.4. On note $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions coefficients de représentations de dimension finie de G. C'est une algèbre pour le produit usuel des fonctions sur G. On a

$$\mathscr{P} = \bigoplus_{\rho \in R} \mathscr{P}_\rho$$

(somme directe d'espaces vectoriels) où $\mathscr{P}_\rho$ est le sous-espace de $\mathscr{P}$ formé des coefficients de la représentation ρ.

$\mathscr{P}$ possède un coproduit $c: \mathscr{P} \to \mathscr{P} \otimes \mathscr{P}$ déterminé par la formule

$$c(p)(g, h) = p(gh)$$

(où on a identifié un élément de $\mathscr{P} \otimes \mathscr{P}$ avec une fonction coefficient du groupe $G \times G$). Les espaces $\mathscr{P}$ et $V(G)$ sont mis en dualité par la forme bilinéaire β suivante:

$$\beta: V(G) \times \mathscr{P} \to \mathbb{C}, \qquad \beta(\gamma_g, p) = p(g)$$

et on a

$$\beta \otimes \beta(\Delta(f), p \otimes q) = \beta(f, pq) \tag{2.4.1}$$

et

$$\beta \otimes \beta(f \otimes k, c(p)) = \beta(fk, p). \tag{2.4.2}$$

Soit $\mathscr{P}^*$ l'espace des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur $\mathscr{P}$. Si G n'est pas fini, $\mathscr{P}$ est de dimension infinie et par conséquent, $\mathscr{P}^* \otimes \mathscr{P}^*$ est strictement inclus dans $(\mathscr{P} \otimes \mathscr{P})^*$. La restriction de c^* (l'application duale de c) à $\mathscr{P}^* \otimes \mathscr{P}^*$, munit $\mathscr{P}^*$ d'une structure d'algèbre. La multiplication sur $\mathscr{P}$ est une application linéaire $m: \mathscr{P} \otimes \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ soit $m^*: \mathscr{P}^* \to (\mathscr{P} \otimes \mathscr{P})^*$ sa transposée. Les formules de dualité montrent alors que $V(G)$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathscr{P}^*$, et le coproduit Δ sur $V(G)$ est la restriction de m^* à $V(G)$.

En tant qu'algèbre, $\mathscr{P}$ est isomorphe au produit direct $\prod_{\rho \in R} V_\rho(G)$. On voit également facilement que la structure involutive de $V(G)$ se prolonge de façon unique à $\mathscr{P}^*$. Reprenant l'exemple du §2.3, on voit que lorsque G est abélien, l'algèbre $\mathscr{P}^*$ n'est autre que l'algèbre de toutes les fonctions à valeurs complexes sur $\widehat{G}$.

3. Equation de Choquet-Deny

3.1. Soit ϕ une fonction continue de type positif sur G. Elle détermine un poids fini μ sur $V(G)$, par la condition $\mu(\gamma_g) = \phi(g^{-1})$, ainsi qu'un opérateur de *convolution* P sur $V(G)$ par la formule:

$$Pf = \mu * f = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(f).$$

Dans la suite, on aura à considérer deux types de convolution: d'une part la convolution des fonctions sur le groupe G, d'autre part la convolution définie ci-dessus au moyen du coproduit Δ. Pour les distinguer on écrira la seconde en italique.

Le semi groupe de *convolution* $(P^n)_{n \geq 0}$ sur $V(G)$ peut être dilaté en une chaîne de Markov quantique. Lorsque ϕ est centrale, la restriction de cette dilatation au centre de l'algèbre $V(G)$ est une chaîne de Markov (au sens usuel) sur l'ensemble R (voir [B1, B2, P]). Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple et ϕ est le caractère d'un poids minuscule, cette chaîne de Markov est le h-processus d'une marche aléatoire sur le réseau des poids entiers du groupe, tuée à la sortie d'une chambre de Weyl (voir [B1, B2]) la fonction harmonique h étant la fonction dimension sur R. On peut montrer (cf. [B2, B3] que la fonction h est unique (à un multiple positif près), ce qui revient à déterminer la frontière de Martin de la chaîne de Markov sur R. Il est donc naturel de chercher à déterminer la frontière de Martin de la chaîne de Markov quantique tout entière.

Pour cela commençons par examiner les “fonctions harmoniques” pour l'opérateur P. Ce sont les solutions positives de l'équation (dite “équation de Choquet-Deny”)

$$\mu * f = f. \tag{3.1.1}$$

Cette équation n'a en général pas de solution positive dans $V(G)$ en dehors de l'identité. Néanmoins, elle conserve un sens pour f dans $\mathscr{P}^*$, et on a l'analogue suivant du résultat de Choquet-Deny, (valable sous une condition sur μ qui remplace celle de non-dégénerescence du support dans le cas usuel):

Théorème 3.1. *Les solutions positives dans $\mathscr{P}^*$ de l'équation de Choquet-Deny sont les éléments de la forme*

$$f = \int_{\mathscr{E}_\mu} e\, dm_f(e)$$

où $\mathscr{E}_\mu$ est l'ensemble des “exponentielles μ-harmoniques”, c'est-à-dire des éléments positifs de $\mathscr{P}^*$ vérifiant $m^*(f) = f \otimes f$ et $\mu(f) = 1$ et m_f est une mesure positive finie sur $\mathscr{E}_\mu$, déterminée de façon unique par f.

Ce théorème est montré dans [B3] (dans le cas où R est dénombrable) pour une fonction ϕ telle que $\phi(e) = 1$, mais la démonstration s'étend sans difficulté au cas général.

3.2. La condition

$$m^*(f) = f \otimes f, \qquad f \neq 0,$$

définit un sous groupe multiplicatif H de $\mathscr{P}^*$, qui contient G (voir [B2, B3]).

Lorsque G est abélien, la fonction ϕ est la transformée de Fourier d'une mesure μ sur $\widehat{G}$, et l'équation (3.1.1) est l'équation de Choquet-Deny classique sur $\widehat{G}$. Le groupe H est alors le groupe des morphismes de $\widehat{G}$ dans $\mathbb{C}^*$, et le Théorème 3.1 redonne le résultat de Choquet-Deny dans ce cas.

Pour un groupe compact quelconque, un élément de H est un caractère de l'algèbre $\mathscr{P}$ (si $f \in H$, $f(pq) = m^*(f)(p \otimes q) = f(p)f(q)$).

Si G est un groupe de Lie semi-simple simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathscr{L}_G$, et $G^{\mathbb{C}}$ le groupe complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{L}_G + i\mathscr{L}_G$, alors toute représentation de dimension finie de G se prolonge de façon unique en une représentation algébrique de $G^{\mathbb{C}}$, et $\mathscr{P}$ est l'algèbre des fonctions algèbriques sur $G^{\mathbb{C}}$ (voir Knapp [K]). Tout élément f de H est l'évaluation en un point de $G^{\mathbb{C}}$ c'est à dire qu'il existe un élément g de $G^{\mathbb{C}}$ tel que $f(p) = p(g)$. Les groupes H et $G^{\mathbb{C}}$ sont donc isomorphes, et il n'est pas difficile de voir que les éléments positifs sont ceux de la forme $\exp i\mathscr{L}_G$ (voir [B2, B3]).

4. Noyau de Martin

4.1. L'espace $\mathscr{E}_\mu$ joue le role de frontière de Martin abstraite pour l'équation de Choquet-Deny associée au poids μ. Le problème de la compactification de Martin consiste maintenant à donner une réalisation géométrique de cette frontière en “recollant” $\mathscr{E}_\mu$ avec l'espace non-commutatif déterminé par $V(G)$.

Pour cela nous allons commencer par construire un noyau de Martin pour la marche quantique.

Comme je n'ai réussi à démontrer le Théorème 5.1 que dans le cas où la fonction ϕ est centrale, à partir de maintenant on se restreint à ce cas ($\phi(gh) =$

$\phi(hg))$. Pour une telle fonction, si $\phi(e)=1$, on a vu dans [B3] que l'ensemble $\mathscr{E}_\mu$ est réduit à un point, par conséquent, on fera également l'hypothèse que $\phi(e)<1$.

4.2. Le poids μ possède une densité par rapport au poids de Haar, qui est $\pi=\int_G \gamma_g \phi(g)\,dg$, c'est à dire que $\mu(a)=\operatorname{tr}(\pi a)$ pour tout $a\in V(G)$. On en déduit que $\sum_{n=0}^\infty \mu^{*n}(a)=\operatorname{tr}(va)$ avec $v=\int_G \gamma_g 1/(1-\phi(g))\,dg$. L'élément v est positif dans $\mathscr{P}^*$. Supposons qu'il soit inversible dans $\mathscr{P}^*$ (ce qui est entraîné par l'hypothèse " h_μ " de [B3]).

Définition 4.1. Le noyau de Martin K est l'application linéaire

$$K:\mathscr{P}\to\mathscr{P}^*,\qquad p\mapsto \int_G \gamma_g \frac{p(g)}{1-\phi(g)}\,dg\Big/\int_G \gamma_g\frac{1}{1-\phi(g)}\,dg.$$

Remarquons que v est dans le centre de $\mathscr{P}^*$, donc il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition du quotient.

4.3. Afin de justifier cette définition, examinons ce qu'elle donne pour un groupe G abélien: dans ce cas, un élement de $\mathscr{P}$ est une combinaison linéaire de caractères $p=\sum_{x\in\widehat{G}}\alpha_x x$, et $K(p)$ est la fonction sur $\widehat{G}$:

$$K(p)(y)=\sum_{x\in\widehat{G}}\alpha_x\frac{u(y-x)}{u(y)}=\sum_{x\in\widehat{G}}\alpha_x k(x,y)$$

on voit donc que la donnée de l'application K est équivalente à celle du noyau de Martin, et de plus, on voit que le prolongement de $K(p)$ à la frontière de Martin est égal à la restriction de p à $\mathscr{E}_\mu$: $K(p)(\xi)=\sum_{x\in\widehat{G}}\alpha_x\xi(x)=p(\xi)$ (rappelons que $\mathscr{E}_\mu\subset H\subset\mathscr{P}^*$, donc $p\in\mathscr{P}$ définit bien une fonction sur $\mathscr{E}_\mu$ par dualité).

5. Compactification de Martin

5.1. Pour étendre la notion de compactification au cadre non-commutatif, il nous faut d'abord donner la version C^*-algèbrique de la notion de compactification d'un espace localement compact. Considérons donc un espace topologique localement compact E, et une compactification $\overline{E}=E\cup\partial E$. Introduisons les algèbres de fonctions continues $C_0(E)$ (fonctions nulles à l'infini sur E), $C(\overline{E})$, $C(\partial E)$. Il y a une suite exacte de C^*-algèbres:

$$0\to C_0(E)\to C(\overline{E})\to C(\partial E)\to 0$$

où la première flèche provient de l'inclusion de E dans $\overline{E}$ et la deuxième est la restriction à ∂E. D'après le théorème de Gelfand, il est équivalent de se donner une compactification $E\hookrightarrow\overline{E}$ ou une suite exacte de C^*-algèbres commutatives $0\to C_0(E)\to A\to B\to 0$ telle que A soit une sous-algèbre avec unité de l'algèbre $C_b(E)$ (fonction continues bornées sur E). Dans le cas du théorème de Ney et Spitzer, les algèbres en question sont: $C_0(Z^d)$, $C(Z^d\cup S^{d-1})$, $C(S^{d-1})$, et les deux premières sont isomorphes à $\mathscr{K}_i(T^d)$, $\Psi_k^0(T^d)$ en identifiant Z^d au groupe dual du tore T^d.

Si l'on part d'une C^*-algèbre sans unité C (considérée comme sous-algèbre d'une algèbre $\mathscr{B}(H)$), qui joue le role d'analogue non-commutatif de $C_0(E)$, l'algèbre $C_b(E)$ a pour analogue l'algèbre $M(C)$ des multiplicateurs de C (cf.

Pedersen [Ped, 3.12]), et une "compactification non-commutative" de C sera la donnée d'une sous C^*-algèbre de $M(C)$ à unité, contenant C.

Il est maintenant facile de formuler l'analogue du théorème de Ney et Spitzer pour $\mathrm{SU}(2)$: on va montrer que $\mathscr{E}_\mu$ est homéomorphe à S^2, et alors, l'image du noyau de Martin et $\mathscr{K}_i(\mathrm{SU}(2))$ engendrent une algèbre d'opéateurs bornés sur $L^2(\mathrm{SU}(2))$ incluse dans l'algèbre des multiplicateurs de $\mathscr{K}_i(\mathrm{SU}(2))$, qui est $\Psi_i^0(\mathrm{SU}(2))$, et de plus, le symbole principal de l'opérateur $K(p)$ pour $p \in \mathscr{P}$ est donné par une formule explicite qui est formellement la même que dans le cas d'un tore (cf. §4.3 ci-dessus). L'algèbre $\Psi_i^0(\mathrm{SU}(2))$ joue le role de compactification de Martin de la marche aléatoire quantique.

On va donner un énoncé plus précis dans la section suivante.

5.2. **Enoncé du résultat principal.** Soit G un groupe de Lie compact, semi-simple, simplement connexe, ϕ une fonction continue, centrale, de type positif sur G, notons H^+ l'ensemble des éléments positifs de H, c'est l'image de $i\mathscr{L}_G$ par l'application exponentielle: $\exp: \mathscr{L}_G + i\mathscr{L}_G \to G^{\mathbb{C}} = H$. La fonction ϕ se prolonge en une fonction sur H^+ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ que l'on note toujours ϕ (cf. [B2]). On fait les hypothèses suivantes sur ϕ:

(a) $\phi(e) < 1$.

(b) ϕ n'est pas invariante par translation par un élément non trivial du centre de G.

(c) $\mathscr{E}_\mu = \{\xi \in H^+ | \phi(\xi) = 1\}$ est non vide et ϕ est finie dans un voisinage de $\mathscr{E}_\mu$.

Considérons la restriction de $\phi \circ \exp$ à $i\mathscr{T}$ où $\mathscr{T}$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de G, alors cette fonction est la transformée de Laplace d'une mesure positive finie, par conséquent elle est différentiable à l'intérieur de l'ensemble où elle est finie (qui contient 0). Par conjugaison, on en déduit que la fonction $\phi \circ \exp$ est différentiable dans un voisinage de $\mathscr{E}_\mu$.

On va montrer l'analogue suivant du théorème de Ney et Spitzer.

Théorème 5.1.

(i) *L'élément* $v = \int_G \gamma_g 1/(1-\phi(g))\, dg$ *est inversible dans* $\mathscr{P}^*(G)$.

(ii) *L'application*

$$l\colon \exp^{-1}(\mathscr{E}_\mu) \to S(T_e^*(G)), \qquad \xi \mapsto \frac{d(\phi \circ \exp)(\xi)}{|d(\phi \circ \exp)(\xi)|}$$

est un homéomorphisme.

(iii) *Si* $G = \mathrm{SU}(2)$, *le noyau de Martin* K *est à valeurs dans* $\Psi_i^0(G)$, *et de plus, pour tout* $p \in \mathscr{P}$, *le symbole principal* $\sigma(K(p))$ *est égal à* $p \circ l^{-1}$.

Remarques. D'après ce qu'on a vu précédemment (4.3), la formule donnant le symbole de $K(p)$ est bien formellement la même que dans le cas usuel. Les fonctions de la forme $p \circ l^{-1}$ forment une algèbre de fonctions sur S^2 qui sépare les points, on en déduit donc que l'image de K et $\mathscr{K}_i$ engendrent Ψ_i^0 tout entier.

6. Démonstration des points (i) et (ii) et estimation du potentiel

6.1. Soit $\mathscr{L}_G$ l'algèbre de Lie de G, T un tore maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathscr{L}_T$, de groupe de Weyl W. On choisit un ordre sur les racines de $\mathscr{L}_G$

relativement à $\mathscr{L}_T$, et on munit $\mathscr{L}_G$ de la métrique de Killing, ce qui permet d'identifier $\mathscr{L}_G$ et $\mathscr{L}_T$ avec $T_e^*(G)$ et $T_e^*(T)$.

Soit $\rho \in R$, notons χ_ρ son caractère. Soit $V(T)$ la sous-algèbre de $V(G)$ engendrée par T, on a $V(T) \sim l^\infty(\widehat{T})$ où $\widehat{T}$ est le groupe dual de T. Soit $C(G)$ le centre de $V(G)$, alors $C(G) \sim l^\infty(R)$. Explicitons ces correspondances: soit $x \in \widehat{T}$, l'élément $\int_T \overline{x}(\theta)\gamma_\theta \, d\theta$ est un projecteur minimal de $V(T)$ correspondant à la fonction indicatrice de x dans $\widehat{T}$. De même, $\int_G d_\rho \overline{\chi}_\rho(g)\gamma_g \, dg$ est un projecteur minimal dans $C(G)$ correspondant à l'indicatrice de ρ.

6.2. Commençons par montrer le point (i) du théorème. On sait que v est un élément central positif de $\mathscr{P}^*$. Il suffit de montrer que

$$\int_G \overline{\chi}_\rho(g)/(1-\phi(g))\, dg > 0$$

pour tout $\rho \in R$. D'après l'hypothèse (b) sur ϕ, il existe $\tau \in R$ tel que $\int_G \phi(g)\overline{\chi}_\tau(g) > 0$, et τ est une représentation injective de G. On en déduit que pour tout $\rho \in R$ il existe n tel que la représentation $\tau^{\otimes n}$ admet ρ dans sa décomposition en composantes irréductibles. Par conséquent,

$$\int_G \phi^n(g)\overline{\chi}_\rho(g) > 0$$

et donc $\int_G \overline{\chi}_\rho(g)/(1-\phi(g))\, dg \geq \int_G \phi^n(g)\overline{\chi}_\rho(g) > 0$.

6.3. **Démonstration de (ii).** Remarquons tout d'abord que ϕ étant centrale, l'action adjointe de G sur $i\mathscr{L}_G$ laisse $\exp^{-1}(\mathscr{E}_\mu)$ invariante, et l'application l est équivariante, $l(\mathrm{Ad}_g(\xi)) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(l(\xi))$. $T_e^*(T)$ s'identifie à un sous-espace de $T_e^*(G)$ grace à la forme de Killing. On va montrer que l envoie $i\mathscr{L}_T$ dans $S(T_e^*(T))$.

Considérons un élément $a \in i\mathscr{L}_G$, orthogonal à $i\mathscr{L}_T$, et montrons que $d\phi(\exp x)\cdot a = 0$ pour tout $x \in i\mathscr{L}_T$. L'espace $i\mathscr{L}_G$ admet une décomposition orthogonale $i\mathscr{L}_T \oplus \bigoplus_{\alpha\neq 0}((E_\alpha + E_{-\alpha}) \cap i\mathscr{L}_G)$ où α parcourt l'ensemble des racines positives de $\mathscr{L}_G + i\mathscr{L}_G$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathscr{L}_T + i\mathscr{L}_T$ et E_α est le sous-espace radiciel associé à α. Par linéarité il suffit de prendre a dans $(E_\alpha + E_{-\alpha}) \cap i\mathscr{L}_G$. L'élément x s'écrit $x = x_\alpha + y$ où y commute avec a et x_α, et $x_\alpha \in [E_\alpha + E_{-\alpha}, E_\alpha + E_{-\alpha}] \cap i\mathscr{L}_G$.

L'algèbre de Lie $\mathscr{L}_\alpha + i\mathscr{L}_\alpha$ engendrée par $E_\alpha + E_{-\alpha}$ est isomorphe à $sl(2) = su(2) + isu(2)$. Posons $\psi(\varepsilon) = \phi(\exp(y+\varepsilon))$, $\varepsilon \in i\mathscr{L}_\alpha$. La fonction ψ est centrale et il faut montrer que $d\psi(x_\alpha)\cdot a = 0$. On est donc ramené à démontrer le résultat pour $G = \mathrm{SU}(2)$, et T le sous-groupe diagonal. L'espace $isu(2)$ est formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} u & \overline{z} \\ z & -u \end{smallmatrix}\right)$, $u \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, et $(E_\alpha + E_{-\alpha}) \cap isu(2)$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \overline{z} \\ z & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Une fonction sur $isu(2)$ qui est centrale est une fonction de $u^2 + z\overline{z}$, donc le résultat suit quand on remarque que $d(z\overline{z})_{z=0} = 0$. D'après ce qu'on vient de voir, la propriété (c) et [N-S, Lemma 1.1], la restriction de ϕ à $i\mathscr{L}_T$, est une homéomorphisme de $\exp^{-1}(\mathscr{E}_\mu) \cap i\mathscr{L}_T$ avec $S(T_e^*(T))$. Le groupe G étant semi-simple et T un tore maximal, il résulte de la propriété d'équivariance que l est un homéomorphisme de $\exp^{-1}(\mathscr{E}_\mu)$ avec $S(T_e^*(G))$.

6.4. En identifiant un élément de R avec le poids dominant de la représentation correspondante, on voit que R s'identifie à une chambre de Weyl dans $\widehat{T}$.

L'opérateur P de *convolution* par μ sur $V(G)$ laisse les algèbres $V(T)$ et $C(G)$ invariantes. Il définit des opérateurs sous-markoviens sur $l^\infty(\widehat{T})$ et $l^\infty(R)$, donnés par des noyaux $p(\rho, \tau)$ et $q(\rho, \tau)$, sur $\widehat{T}$ et R respectivement. p est le noyau de *convolution* (attention, il s'agit aussi d'une convolution sur $\widehat{T}$ qui est un groupe!) associé à la mesure sur $\widehat{T}$ dont la transformée de Fourier est la restriction de ϕ à T. On va voir que les noyaux p et q sont reliés par le groupe de Weyl.

On note η la demi-somme des racines positives.

Proposition 6.1.

$$q(\rho, \tau) = \frac{d_\rho}{d_\tau} \sum_{w \in W} \det(w) p(\eta + \rho, w(\eta + \tau)).$$

Démonstration. (Dans cette démonstration, on note multiplicativement les caractères de T.) On a

$$q(\rho, \tau) = \frac{d_\rho}{d_\tau} \int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi}_\tau(g) \phi(g)\, dg, \qquad \rho, \tau \in R,$$

et

$$p(\rho, \tau) = \int_T \rho(\theta) \overline{\tau}(\theta) \phi(\theta)\, d\theta, \qquad \rho, \tau \in \widehat{T}$$

(voir [B2, Théorèmes 3.1 et 3.2]). On a donc

$$\begin{aligned}
q(\rho, \tau) &= \frac{d_\rho}{d_\tau} \int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi}_\tau(g) \phi(g)\, dg \\
&= \frac{d_\rho}{d_\tau} \frac{1}{|W|} \int_T \chi_\rho(\theta) \overline{\chi}_\tau(\theta) \phi(\theta) \left| \sum_{w \in W} w(\eta)(\theta) \right|^2 d\theta \\
&\qquad\qquad \text{d'après la formule d'intégration de Weyl [B-tD]} \\
&= \frac{d_\rho}{d_\tau} \frac{1}{|W|} \int_T \sum_{w \in W} \det(w) w(\eta + \rho)(\theta) \sum_{w' \in W} \det(w') w'(\overline{\eta} + \overline{\tau})(\theta) \phi(\theta)\, d\theta \\
&\qquad\qquad \text{d'après la formule du caractère de Weyl} \\
&= \frac{d_\rho}{d_\tau} \int_T \sum_{w \in W} \det(w) (\eta + \rho)(\theta) w(\overline{\eta} + \overline{\tau})(\theta) \phi(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{d_\rho}{d_\tau} \sum_{w \in W} \det(w) p(\eta + \rho, w(\eta + \tau)).
\end{aligned}$$

Corollaire 6.1. *Notons v et u les potentiels des chaînes de Markov sur R et $\widehat{T}$, on a*

$$v(\rho, \tau) = \frac{d_\rho}{d_\tau} \sum_{w \in W} \det(w) u(\eta + \rho, w(\eta + \tau)).$$

6.5. Une conséquence de ce calcul est une estimation asymptotique du noyau potentiel de la chaîne sur R, loin des murs de la chambre de Weyl. On a, en notant 0 le caractère trivial sur T:

$$v(0, \tau) = d_\rho \sum_{w \in W} \det(w) u(\eta, w(\eta + \tau)).$$

Faisons tendre $|\tau|$ vers ∞ de sorte que $\tau/|\tau| \to \xi \in S(T_e^*(T))$, alors, d'après le théorème de Ney et Spitzer, on a pour $\tau' \in \widehat{T}$ tel que $\tau + \tau'$ reste dans R:

$$u(0, \tau + \tau') = u(0, \tau)(e^{\langle l^{-1}(\xi), \tau' \rangle} + o(1))$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} v(0, \tau) &= d_\rho u(0, \tau) \left(\sum_{w \in W} \det(w) e^{\langle l^{-1}(\xi), \eta - w(\eta) \rangle} + o(1) \right) \\ &= d_\rho u(0, \tau) e^{\langle l^{-1}(\xi), \eta \rangle} \left(\prod_{\alpha > 0} \operatorname{sh}\langle l^{-1}(\xi), \alpha \rangle + o(1) \right) \end{aligned}$$

d'après la formule du dénominateur de Weyl, le produit étant pris sur les racines simples positives α.

Cette estimation n'est pertinente que lorsque ξ n'est pas dans un mur de la chambre de Weyl, auquel cas $\prod_{\alpha>0} \operatorname{sh}\langle l^{-1}(\xi), \alpha \rangle > 0$. Nous en tirons la proposition suivante qui sera utile par la suite.

Proposition 6.5. *Soit $\rho \in R$ et faisons tendre $|\tau|$ vers ∞ de sorte que $\tau/|\tau| \to \xi \in S(T_e^*(T))$ et ξ n'est pas dans un mur, alors*

$$v(0, \tau + \rho)/v(0, \tau) \to e^{-\langle l^{-1}(\xi), \rho \rangle}.$$

Démonstration. D'après ce qui précède il suffit de calculer la limite de

$$d_{\rho+\tau} u(0, \rho + \tau)/d_\rho u(0, \rho),$$

mais la fonction dimension $\rho \to d_\rho$ est polynomiale, donc $d_{\rho+\tau}/d_\rho \to 1$ et $u(0, \rho + \tau) = u(-\rho, \tau)$, donc le théorème de Ney et Spitzer donne le résultat.

7. Démonstration de la partie (iii) du théorème

7.1. On se limite maintenant à $G = \mathrm{SU}(2)$ le groupe des matrices complexes 2×2 unitaires de déterminant 1. Pour tout ce qui concerne les résultats sur les représentations de G je renvoie à Vilenkin [V].

Comme dans [V], indexons les représentations irréductibles de G par les demi-entiers $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, et considérons la base $(P_{jj'}^l)$ de l'espace des fonctions coefficients de la représentation associées à l, de dimension $2l + 1$, les indices j, j' étant tels que: $l - j$, $l - j'$ sont entiers, et $-l \le j, j' \le l$. Rappelons que $\chi_l = \sum_{j=-l}^{j=l} P_{jj}^l$ est le caractère de cette représentation. La fonction centrale de type positif ϕ sur G est de la forme $\phi = \sum_{l \in \mathbb{N}/2} c_l \chi_l$, les c_l étant positifs. On suppose que les coefficients c_l, $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ ne sont pas tous nuls, (hypothèse (b)) et que $\phi(e) < 1$. Soit $\mathscr{E}_\phi$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ tels que $\phi(f) = 1$. On va commencer par expliciter l'application l. On a

$$\phi\left(\exp\begin{pmatrix} u & \overline{z} \\ z & -u \end{pmatrix}\right) = \sum_{l \in \mathbb{N}/2} c_l \frac{\operatorname{sh}((2l+1)\sqrt{u^2 + z\overline{z}})}{\operatorname{sh}(\sqrt{u^2 + z\overline{z}})} \equiv h(\sqrt{u^2 + z\overline{z}}).$$

L'application h étant strictement convexe sur $(0, +\infty)$ avec $h(0) = \phi(e) < 1$, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 1$. L'ensemble $\exp^{-1}(\mathscr{E}_\phi)$ est formé des éléments de $isu(2)$ de norme α. On vérifie alors facilement que l'application l n'est autre que l'homothétie de rapport $1/\alpha$.

Le potentiel $v = \int_G 1/(1-\phi(g))\gamma_g \, dg$ est de la forme

$$v = \sum_{l \in \mathbb{N}/2} v_l \chi_l$$

et d'après la Proposition 6.2, si $m \in Z$

$$\text{quand } l \to \infty, \qquad v_{l+m}/v_l = e^{-2m\alpha} + o(1).$$

7.2. Soit w un élément de $su(2)$, il définit un champ de vecteurs invariant à droite X_w sur G, et donc un opérateur auto-adjoint non borné iX_w sur $L^2(G)$. Soit $C = -(X_{w_1}^2 + X_{w_2}^2 + X_{w_3}^2)$ l'opérateur de Casimir où (w_1, w_2, w_3) est une base orthonormée de $su(2)$. C est autoadjoint positif sur $L^2(G)$. On pose $N = \sqrt{\frac{1}{4}\,\mathrm{Id} + C}$.

Lemme 7.1. *Pour tout* $w \in su(2)$, $iX_w/N \in \Psi_i^0(G)$ *et* $\sigma(iX_w/N)(\xi) = \langle \xi, w\rangle$.

Démonstration. iX_w est un opérateur (pseudo-)différentiel d'ordre 1 invariant à droite dont le symbole principal est $\langle \cdot, w\rangle$. De même, $\mathrm{Id} + C$ est un opérateur d'ordre 2 dont le symbole principal est 1, et il est de plus autoadjoint $\geq \mathrm{Id}$. On en déduit le résultat par le calcul fonctionnel sur les opérateurs pseudo-différentiels.

7.3. **Lemme 7.2.** *Les fonctions* $((P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}})^n(g \cdot g^{-1}))_{n \in \mathbb{N}, g \in G}$ *engendrent l'espace vectoriel* $\mathscr{P}(G)$.

Démonstration. Les fonctions $P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}(g \cdot g^{-1})$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $P^{\frac{1}{2}}_{kl}$ de la forme

$$\alpha\overline{\alpha}P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} + \alpha\overline{\beta}P^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} + \overline{\alpha}\beta P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}} + \beta\overline{\beta}P^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, donc en prenant les puissances et en utilisant les identités de polarisation, tous les polynomes en $P^{\frac{1}{2}}_{kl}$, sont dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions $((P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}})^n(g \cdot g^{-1}))$ et donc tout $\mathscr{P}(G)$.

Les fonctions $p \in \mathscr{P}$ pour lesquelles le Théorème 5.1(iii) est vérifié forment un espace vectoriel, qui est stable par l'action adjointe de G (car ϕ est centrale), donc d'après le lemme précédent, il suffit de montrer le point (iii) du Théorème 5.1 pour les fonctions de la forme $(P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}})^n$.

Dans la suite on note pour simplifier $P^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} = P$ et $P^l_{jj} = P^l_j$. Il faut donc montrer que $K(P^n) \in \Psi_i^0(G)$ et que son symbole principal est $P^n \circ \exp \circ l^{-1}$.

7.4. Soit $t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in su(2)$, d'après 7.1 la fonction $P \circ \exp \circ l^{-1}$ est égale à $\operatorname{sh}\alpha\langle \cdot, t\rangle + \operatorname{ch}\alpha$, donc d'après le Lemme 7.1 l'opérateur $(\operatorname{sh}\alpha iX_t/N + \operatorname{ch}\alpha\,\mathrm{Id})^n \in \Psi_i^0(G)$ et a pour symbole principal $P^n \circ \exp \circ l^{-1}$, et il suffit pour démontrer le théorème de montrer que $(\operatorname{sh}\alpha iX_t/N + \operatorname{ch}\alpha\,\mathrm{Id})^n - K(P^n)$ est un opérateur compact pour tout n.

Notons E^l_j l'opérateur de convolution à gauche par la fonction $(2l+1)P^l_j$ sur $L^2(G)$. Ces opérateurs sont des projecteurs auto-adjoints orthogonaux entre eux.

Lemme 7.3.
$$\frac{iX_t}{N} = \sum_{l\in\mathbb{N}\,,\,-l\leq j\leq l} \frac{2j}{2l+1} E^l_j.$$

D'après la remarque précédant le lemme, la somme définit bien un opérateur borné sur $L^2(G)$ *car les coefficients* $2j/(2l+1)$ *sont bornés.*

Démonstration. D'après un résultat classique de théorie des représentations de $su(2)$ (voir [V]), on a $iX_t = \sum_{l\in\mathbb{N}\,,\,-l\leq j\leq l} jE^l_j$ et $C = \sum_{l\in\mathbb{N}\,,\,-l\leq j\leq l} l(l+1)E^l_j$, d'où le résultat. Il reste à évaluer l'opérateur $K(P^n)$ en terme des E^l_j.

7.5. **Lemme 7.4.**
$$PP^l_j = \frac{l-j}{2l+1}P^{l-1/2}_{j+1/2} + \frac{l+j+1}{2l+1}P^{l+1/2}_{j+1/2}.$$

Démonstration. C'est un cas particulier de la formule (2), Chapitre III, 8 de Vilenkin [V]. On déduit du Lemme 7.4 que
$$P^nP^l_j = \sum_{k=0}^{k=n} C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j)P^{l+k-n/2}_{j+n/2}$$

où les coefficient $C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j)$ sont positifs.

7.6. De la formule ci-dessus on tire

Lemme 7.5.
$$\frac{P^n}{1-\phi} = \sum_{l\in\mathbb{N}}\ \sum_{-l\leq j\leq l}\ \sum_{k=0}^{k=n} C\left(l-k+\frac{n}{2}\,,\,n\,,\,k\,,\,j-\frac{n}{2}\right)v_{l-k+n/2}P^l_j.$$

Démonstration. On a
$$\begin{aligned}\frac{P^n}{1-\phi} &= \sum_l v_lP^n\chi_l = \sum_l v_l \sum_j P^nP^l_j\\ &= \sum_l v_l \sum_j \sum_{k=0}^{k=n} C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j)P^{l+k-n/2}_{j+n/2}\\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}/2}\ \sum_{-l\leq j\leq l}\ \sum_{k=0}^{k=n} C\left(l-k+\frac{n}{2}\,,\,n\,,\,k\,,\,j-\frac{n}{2}\right)v_{l-k+n/2}P^l_j.\end{aligned}$$

7.7. Le dernier calcul va consister à estimer les coefficients $C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j)$.

Lemme 7.6. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* $0\leq k\leq n$ *on a*
$$C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j) = C^k_n\left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^k\left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k} + o(1)$$

uniformément en j *pour* $-l\leq j\leq l$.

Démonstration. On a
$$P^{n+1}P^l_j = \sum_{k=0}^{k=n+1} C(l\,,\,n+1\,,\,k\,,\,j)P^{l+k-(n+1)/2}_{j+(n+1)/2}$$

et

$$\begin{aligned} P^{n+1}P_j^l &= P(P^nP_j^l) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j) P P_{j+n/2}^{l+k-n/2} \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j) \left(\frac{l+k-n-j}{2l+2k-n+1} P_{j+(n+1)/2}^{l+k-n/2-1/2} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{l+k+j+1}{2l+2k-n+1} P_{j+(n+1)/2}^{l+k-n/2+1/2} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} C(l\,,\,n+1\,,\,k\,,\,j) = {} & \frac{l+k-n-j}{2l+2k-n+1} C(l\,,\,n\,,\,k\,,\,j) \\ & + \frac{l+k-1-n+j}{2l+2k-n-1} C(l\,,\,n\,,\,k-1\,,\,j). \end{aligned}$$

Supposons le lemme démontré pour l'entier n, alors, lorsque $l \to \infty$ on a

$$\frac{l+k+j+1}{2l+2k-n+1} = \frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1} + o(1)$$

et

$$\frac{l+k-n-j-1}{2l+2k-n-1} = \frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1} + o(1)$$

uniformément en j et k pour $-l \leq j \leq l$ et $0 \leq k \leq n$, et donc

$$\begin{aligned} C(l\,,\,n+1\,,\,k\,,\,j) = {} & \frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1} C_n^k \left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^k \left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k} \\ & + \frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1} C_n^{k-1} \left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{k-1} \left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k+1} + o(1) \\ = {} & C_{n+1}^k \left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^k \left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k+1} + o(1) \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant immédiat.

7.8. Du Lemme 7.5 on déduit que

$$K(P^n) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\leq j\leq l} \sum_{k=0}^{k=n} C\left(l-k+\frac{n}{2}\,,\,n\,,\,k\,,\,j-\frac{n}{2}\right) \frac{v_{l-k+n/2}}{v_l} E_j^l.$$

D'après 7.1 et le Lemme 7.6 on a

$$C\left(l-k+\frac{n}{2}\,,\,n\,,\,k\,,\,j-\frac{n}{2}\right) = C_n^k \left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^k \left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k} + o(1)$$

et

$$v_{l-k+n/2}/v_l = e^{(n-2k)\alpha} + o(1)$$

uniformément en k et en j lorsque $l \to \infty$.

On a donc

$$\begin{aligned}
K(P^n) &= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\le j\le l} \left(\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \left(\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^k \left(\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1}\right)^{n-k} e^{(n-2k)\alpha} + \mathscr{E}_j^l \right) E_j^l \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\le j\le l} \left(\left(e^{\alpha}\frac{l+j+\frac{1}{2}}{2l+1} + e^{-\alpha}\frac{l-j+\frac{1}{2}}{2l+1} \right)^n + \mathscr{E}_j^l \right) E_j^l \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\le j\le l} \left(\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha \frac{2j}{2l+1} \right)^n E_j^l + \mathscr{E}_j^l E_j^l
\end{aligned}$$

où les coefficients $\mathscr{E}_j^l$ sont en $o(1)$ uniformément en j quand $l \to \infty$ uniformément en j. Finalement, d'après le Lemme 7.1:

$$K(P^n) = \left(\operatorname{ch}\alpha \,\mathrm{Id} + \operatorname{sh}\alpha \frac{iX_w}{R} \right)^n + \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\le j\le l} \mathscr{E}_j^l E_j^l.$$

l'opérateur $\sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{-l\le j\le l} \mathscr{E}_j^l E_j^l$ étant un opérateur compact, la démonstration du théorème est terminée.

8. Cas d'un groupe semi-simple

Indiquons brièvement les difficultés recontrées lorqu'on essaie d'étendre la démonstration qui précède au cas d'un groupe semi-simple de rang ≥ 2. Dans ce cas deux problèmes restent à résoudre pour démontrer le point (iii) du Théorème 5.1. Le premier est d'obtenir la Proposition 6.2 lorsque ξ est dans un mur de la chambre de Weyl. Pour cela il faudrait améliorer l'équivalent du noyau potentiel donné dans l'article de Ney et Spitzer afin de tenir compte des annulations produites par la somme alternée sur les éléments du groupe de Weyl.

Le second problème est d'avoir suffisamment de renseignements asymptotiques sur les coefficients de Clebsch-Gordan. On ne connait pas de formules explicites pour ces coefficients en général. D'autre part, les calculs du §7 utilisent implicitement le fait que l'algèbre (commutative) engendrée par $V(T)$ et $C(G)$ est stable par l'opérateur de *convolution* P. Ceci n'est plus vrai en général pour des groupes de rang supérieur, en fait seul le commutant de cette algèbre reste stable, et il est différent de l'algèbre s'il existe des représentations irréductibles dont la restriction à T a des poids de multiplicité ≥ 2.

A cause de ces difficultés, la méthode utilisée dans cet article ne semble pas donner de résultat pour un groupe semi-simple général, et il faut trouver d'autres idées pour résoudre ce problème.

Références

[B1] Ph. Biane, *Quantum random walk on the dual of* SU(n), Probab. Theory Related Fields **89** (1991), 117–129.

[B2] ——, *Minuscule weights and random walks on lattices*, Quantum Probability and Related Topics, Vol. VII, 1992, pp. 51–65.

[B3] ——, *Equation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact*, Probab. Theory Related Fields **94** (1992), 39–52.

[B-tD] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representation of compact Lie groups*, Graduate Texts in Math., vol. 98, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985.

[C] A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Interéditions, Paris, 1990.

[De] J. Deny, *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$, Séminaire de théorie du potentiel, 4^e année 1959-1960, $n^\circ 5$.

[Di] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[K] A. W. Knapp, *Representation theory of semi-simple Lie groups*, Princeton Math. Ser., no. 36, Princeton, NJ, 1986.

[K-S-K] J. G. Kemeny, J. L. Snell, and A. W. Knapp, *Denumerable Markov chains*, Graduate Texts in Math., vol. 40, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.

[N-S] P. Ney and F. Spitzer, *The Martin boundary of random walk*, Trans. Amer. Math. Soc. **121** (1966), 115–132.

[P] K. R. Parthasarathy, *A generalized Biane's process*, Sém. Probab. XXIV, Lecture Notes in Math., vol. 851, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1991.

[Ped] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, San Diego, 1979.

[V] N. J. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Mono., vol. 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

CNRS, Laboratoire de Probabilités, Université Paris 6, 75252, Paris Cedex 05, France
E-mail address: `pbi@ccr.jussiev.fr`